

Charakteristische Funktion

Für $M \subset X$ wird die charakteristische Funktion χ_M wie folgt definiert:

$$\chi_M(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in M \\ 0 & \text{für } x \notin M \end{cases}.$$

a) Berechne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{[-n,n]}(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Ist die Konvergenz gleichmäßig auf \mathbb{R} ?

b) Zeige, dass die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch

$$f_n(x) := e^{-|x|} \chi_{[-n,n]}(x)$$

gleichmäßig auf \mathbb{R} gegen die Funktion $e^{-|x|}$ konvergiert.